Краткие сообщения ОИЯИ №10-85   JINR Rapid Communications No.10-85
УДК 535.14:530.182.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДВУХМОДОВАЯ МОДЕЛЬ ДИККЕ

Э.И.Алискендеров, А.А.Молдояров*, А.С.Шумовский

Рассмотрена модель типа модели Дикке с квадратичным по операторам поля взаимодействием. Физической реализацией такой системы могут служить дипольно-запрещенные переходы, используемые в процессах нелинейного преобразования ИК-излучения в видимый диапазон, либо система, описывающая взаимодействие материи с электромагнитным полем и фононами. Для исследования подсистемы поля использован метод глауберовских когерентных состояний. Методом проекторов на состояния с конечным числом фотонов вычислена статистическая сумма. Построен аппроксимирующий гамильтониан. Показано отсутствие равновесного фазового перехода в сверхизлучательное состояние, при этом населенность нижнего уровня всегда больше, чем верхнего.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Nonlinear Two-Mode Dicke Model

E.I.Aliskenderov, A.A.Moldoyarov, A.S.Shumovsky

A Dicke type model with the quadratic in field operators interaction is considered. A physical realization of such a system is dipole-forbidden transitions, used in the processes of nonlinear transformation of infrared radiation into a visible range, or the system, describing the interaction of a matter with electromagnetic field and the phonons. The method of Glauber coherent states is applied to study the field subsystem. The partition function is calculated by the method of projectors onto the states with finite number of photons. The approximating Hamiltonian is constructed. It is shown there is no equilibrium phase transition into a superradiance state, the population of the lower level being always larger than of the upper one.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

* Институт математики АН КиргССР

Рассмотрим двухфотонные процессы в системе N двухуровневых атомов. Физической реализацией такой системы могут служить дипольно-запрещенные переходы, используемые, например, в процессах преобразования ИК-излучения в видимый диапазон[1]. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = H_F + H_M + H_{M-F}; \quad H_F = \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2,$$

$$H_M = N\epsilon\sigma^z; \quad H_{M-F} = \lambda(\sigma^+ a_1 a_2 + \sigma^- a_1^+ a_2^+). \qquad /1/$$

Здесь $a_i^\#$ - операторы электромагнитного поля, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}; \quad [a_i, a_j] = 0; \quad i, j = 1, 2.$$

Операторы материи σ^z, $\sigma^\pm$ аддитивно выражаются через матрицы Паули, отнесенные к узлу f:

$$\sigma^z = \frac{1}{2N}\sum_{f=1}^{N}\sigma_f^z; \quad \sigma^\pm = \frac{1}{2N}\sum_{f=1}^{N}(\sigma_f^x \pm i\sigma_f^y).$$

Отметим, что одно из полей в /1/ можно интерпретировать как фононное поле[2]. Следует упомянуть, что равновесные свойства сходного обобщения модели Дикке, отличающегося наличием еще и линейного по бозонам взаимодействия, рассматривались Джилмором[3]. При этом было показано, что при достаточно больших значениях константы связи в системе есть фазовый переход в сверхизлучательное состояние.

Для исследования термодинамики системы с гамильтонианом /1/ удобным представляется метод глауберовских когерентных состояний[4,5]. На первом этапе получим сходящиеся в термодинамическом пределе верхнюю и нижнюю границы для статистической суммы по гамильтониану /1/. С этой целью введем в полном пространстве состояний $\mathcal{H} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{H}_s$ / $\mathcal{F}_i$ - пространство, на котором определены операторы $a_i^\#$, и $\mathcal{H}_s$ - пространство состояний операторов спина $\sigma^j/2$ $(j = x, y, z)$ размерности 2^N / проекторы $P_1(n)$ и $P_2(m)$ на состояния с не менее чем n фотонами и не менее чем m фононами. Из этого определения следует, что $P_i(k) \to I_i$ в сильном смысле /глава 8 книги[6]/. Кроме того, учтем, что для гамильтониана /1/ выполняются следующие условия: 1/ $D(H)$ плотно в $\mathcal{H}$; 2/ $H = H^+$, $D(H) = D(H^+)$; 3/ $\forall\psi \in D(H)$, $\exists a: (\psi, H\psi) > a\|\psi\|^2$; 4/ $\sigma_{ess} = \emptyset$, т.е. спектр дискретен; 5/ H принадлежит Tr-классу. Доказательство этих свойств проводится в рамках техники, изложенной, например, в[8]. Положим далее

$$H(n, m) = P_1(n)\,P_2(m)\,H\,P_2(m)\,P_1(n)$$

и рассмотрим

$$Z(n,m) = \operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{H}\}} P_1(n)\, P_2(m) \exp(-\beta H(n,m)). \qquad /2/$$

Очевидно, что в /2/ берется след оператора в конечномерном пространстве. Заметим также, что общей областью определения для оператора H в /1/ и операторов $H(n,m)$ является область $\mathcal{H} = \bigcup_{\{n,m\}} P_1(n)\, P_2(m)\, \mathcal{H}$, и для любого состояния $\psi \in \mathcal{H}_0$ можно удовлетворить равенству

$$P_1(n)\, P_2(m)\, H\, P_2(m)\, P_1(n)\psi = H\psi,$$

выбрав достаточно большие значения n и m. В силу этого равенства и свойств 1/ и 2/ имеем $H(n,m) \to H$ в смысле сильной резольвентной сходимости /глава 7 книги[6]/. Из последнего следует, что для проекторнозначных мер имеет место предел $S - \lim\limits_{n,m\to\infty} P_{(a,b)}(n,m) = P_{(a,b)}$; $(a,b) \not\in \sigma(H)$ /поскольку в силу спектральной теоремы $P_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{G(\lambda^+)} R_\mu d\mu$, где $R_\mu = (H - \mu \mathbf{1})^{-1}$, а $G(\lambda^+)$ - известный стандартный контур/.

Пусть $\{\psi_k, \mathcal{E}_k\}_{k=1}^{\infty}$ - системы собственных векторов и собственных значений для гамильтониана H. Для $H(n,m)$ соответствующую систему обозначим $\{\psi_\ell(n,m), \mathcal{E}_\ell(n,m)\}_{\ell=1}^{n\cdot m\cdot 2^N}$. Мы можем использовать $\psi_\ell(n,m)$ в качестве пробных функций для H и методом Рэлея - Ритца /глава 13 книги[7]/ получить $\mathcal{E}_\ell(n,m) > \mathcal{E}_\ell$ для $1 \le \ell \le n\cdot m\cdot 2^N$. Последнее вместе с сильной сходимостью проекторнозначных мер достаточно для существования пределов $\psi_\ell(n,m) \to \psi_\ell$, $\mathcal{E}_\ell(n,m) \to \mathcal{E}_\ell$ поточечно по индексу ℓ в силу спектральной теоремы /глава 8 книги[6]/. Из формул Рэлея - Ритца следует также, что $\exp(-\beta\mathcal{E}_j(n,m)) < \exp(-\beta\mathcal{E}_j)$ для $j: 1 \le j \le n\cdot m\cdot 2^N$. Из теоремы о мажорированной сходимости получаем

$$\lim_{n,m\to\infty} Z(n,m) = Z. \qquad /3/$$

В каждом из пространств $\mathcal{F}_i$ введем усеченные глауберовские состояния

$$|\alpha_i, n\rangle = P_i(n)\,|\alpha_i\rangle, \quad a_i\,|\alpha_i\rangle = \alpha_i\,|\alpha_i\rangle. \qquad /4/$$

Тогда справедливы соотношения

$$\langle\alpha_i, n|\beta_i, n\rangle = K_i(\alpha_i, \beta_i, n) =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2)\right] \times \sum_{n'=1}^{n} (\alpha_i^* \beta_i)^{n'} / n'!, \qquad /5/$$

$$\operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{F}_i\}} P_i(n)|\alpha_i\rangle\langle\beta_i| P_i(n) = \operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{F}_i\}} |\alpha_i, n\rangle\langle\beta_i, n| = K_i(\alpha_i, \beta_i, n), \qquad /6/$$

$$\operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{F}_i\}} P_i(n) A P_i(n) = \frac{1}{\pi} \int d\alpha_i \langle\alpha_i, n| A |\alpha_i, n\rangle, \qquad /7/$$

где A - произвольный оператор в $\mathcal{F}_i$,

$$\langle\alpha_i, n| a_i |\alpha_i, n\rangle = \alpha_i K_i(\alpha_i, \alpha_i, n-1), \qquad /8/$$

$$\langle\alpha_i, n| a_i^+ a_i | n, \alpha_i\rangle = |\alpha_i|^2 K_i(\alpha_i, \alpha_i, n-1), \qquad /9/$$

$$P_i(n) = \frac{1}{\pi} \int d\alpha_i |\alpha_i, n\rangle\langle n, \alpha_i|, \qquad /10/$$

$$P_i(n) a_i^+ a_i P_i(n) = \frac{1}{\pi} \int d\alpha_i (|\alpha_i|^2 - 1)|\alpha_i, n\rangle\langle n, \alpha_i|, \qquad /11/$$

$$\frac{1}{\pi} \int d\alpha_i K_i(\beta_i, \alpha_i, n) K_i(\alpha_i, \gamma_i, n) = K_i(\beta_i, \gamma_i, n). \qquad /12/$$

Предельным переходом $n \to \infty$ можно получить формулы для обычных глауберовских состояний. Поскольку мы уже доказали, что $Z(n, m) \to Z$, то для получения нижней границы оценки статистической суммы воспользуемся формулой /7/, подставляя $A = \exp(-\beta H)$. Из неравенства Боголюбова - Пайерлса

$$\langle\psi| e^A |\psi\rangle \ge \langle\psi|\psi\rangle \exp[\langle\psi| A |\psi\rangle / \langle\psi|\psi\rangle]$$

получаем оценку снизу для усеченной статистической суммы

$$Z(n, m) > \operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{H}_s\}} \frac{1}{\pi} \int d\alpha_1 d\alpha_2 K_1(\alpha_1, \alpha_1, n) K_2(\alpha_2, \alpha_2, m) \times$$
$$\times \exp\Big[-\beta \Big\{ \omega_1 |\alpha_1|^2 \frac{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n-1)}{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n)} + \omega_2 |\alpha_2|^2 \frac{K_2(\alpha_2, \alpha_2, m-1)}{K_2(\alpha_2, \alpha_2, m)} +$$
$$+ \frac{\lambda}{2N} \sum_{f=1}^{N} (\sigma_f^- \alpha_1^* \alpha_2^* + \sigma_f^+ \alpha_1 \alpha_2) \cdot \frac{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n-1)}{K_2(\alpha_2, \alpha_2, m)} \times \qquad /13/$$
$$\times \frac{K_2(\alpha_2, \alpha_2, m-1)}{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n)} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{f=1}^{N} \sigma_f^z \Big\}\Big].$$

Взяв след в пространстве $\mathcal{H}_s$ и переходя к пределу $n, m \to \infty$, имеем $Z > \tilde{Z}$, где

$$\tilde{Z} = \frac{1}{\pi^2} \int d\alpha_1 d\alpha_2 \exp[-\beta(\omega_1 |\alpha_1|^2 + \omega_2 |\alpha_2|^2)] \cdot 2^N \cdot [\mathrm{ch}(\beta(\epsilon^2 + \frac{\lambda^2}{N^2} |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2)^{1/2})]. \qquad /14/$$

Отметим, что оценка /14/ справедлива в силу теоремы о мажорированной сходимости.

Для получения оценки сверху введем следующее выражение

$$Z_k(n, m) = \mathrm{Tr}\, P_1(n)\, P_2(m)\, (1 - \beta \frac{H(n, m)}{k})^k \qquad /15/$$

и, следуя Либу[9], воспользуемся одним из неравенств Голдена[10]

$$|\mathrm{Tr}(AB)^{2m}| \le \mathrm{Tr}\, (A^2 B^2)^m \le \mathrm{Tr}\, A^{2m} B^{2m}, \qquad /16/$$

сформулированным, правда, для ограниченных операторов. Чтобы обойти вопрос о сходимости в /15/, введем везде, где есть операторы поля $a_i^\#$, обрезающий фактор $e^{-\gamma|a_i|^2}$, $\gamma > 0$, как это было сделано в[11] для стандартной модели Дикке. Полученный таким образом гамильтониан обозначим $H_k^\gamma(n, m)$, а выражение в /15/ - как $Z_k^\gamma(n, m)$. Применяя /16/, имеем

$$Z_k^\gamma(n, m) < \int \frac{d\alpha_1}{\pi} \cdot \frac{d\alpha_2}{\pi} K_1(\alpha_1, \alpha_2, n)\, K_2(\alpha_2, \alpha_2, m) \times \mathop{\mathrm{Tr}}_{\{\mathcal{H}_s\}} (1 - \beta \frac{H^\gamma(n, m)}{k})^k. \qquad /17/$$

Снова пользуясь теоремой о мажорированной сходимости, вычисляя след в $\mathcal{H}_s$ и интеграл в правой части /что легко в силу его гауссовости/, а также полагая $\gamma = 0$ /что возможно в силу равномерности оценки /17/ по γ/, получаем

$$\tilde{Z} \le Z \le \tilde{Z} \exp(\beta(\omega_1' + \omega_2)), \qquad /18/$$

где $\tilde{Z}$ дается выражением /14/. Очевидно, что в термодинамическом пределе верхняя и нижняя границы в /18/ сходятся. Свободная энергия рассматриваемой системы, таким образом, равна

$$f = -\frac{1}{\beta} \lim_{N \to \infty} \frac{\ln \tilde{Z}}{N}. \qquad /19/$$

Легко видеть, что заменами $x_i = \frac{|a_i|^2}{N}$ можно преобразовать статистическую сумму $\tilde{Z}$ в следующее выражение:

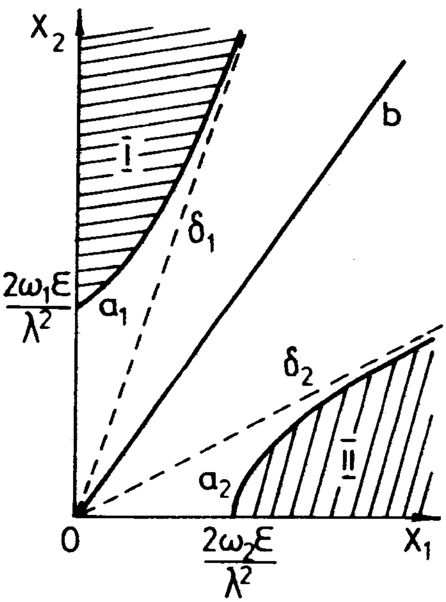
$$\tilde{Z} = N^2 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \exp[N\{-\beta(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) + \ln(2\,\mathrm{ch}(\beta\epsilon\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} x_1 x_2}))\}]. \qquad /20/$$

Интеграл /20/ вычисляется стандартно методом Лапласа. Уравнение для точек экстремума функции

$$\Phi(x_1, x_2) = -\beta(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) + \ln(2\,\mathrm{ch}(\beta\epsilon\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} x_1 x_2}))$$

выглядит следующим образом:

$$\mathrm{th}(\beta\epsilon\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} x_1 x_2}) = \frac{2\epsilon\omega_1}{\lambda^2 x_2}\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} x_1 x_2} = \frac{2\epsilon\omega_2}{\lambda^2 x_1}\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\epsilon^2} x_1 x_2}. \qquad /21/$$



Области экстремумов функции $\Phi(\cdot)$: I – область существования решений уравнения $\frac{\partial\Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$, II – то же для уравнения $\frac{\partial\Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$; a_1 – кривая $x_1 = \frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\frac{1}{x_2}((\frac{\lambda^2}{2\omega_1\epsilon})^2 x_2^2 - 1)$; δ_1 – прямая $x_2 = \frac{4\omega_1^2}{\lambda^2} x_1$; a_2 – кривая $x_2 = \frac{\epsilon^2}{\lambda^2}\frac{1}{x_1}((\frac{\lambda^2}{2\omega_2\epsilon})^2 x_1^2 - 1)$; δ_2 – прямая $x_2 = \frac{\lambda^2}{4\omega_2^2} x_1$; b – прямая $\omega_1 x_1 = \omega_2 x_2$.

Они попросту несовместны при $\lambda \le 2\sqrt{\omega_1\omega_2}$ /см. рисунок/, поскольку области, где они имеют решения, не пересекаются. В случае $\lambda > 2\sqrt{\omega_1\omega_2}$ прямым вычислением убеждаемся, что квадратичная форма из вторых производных от $\Phi(x_1, x_2)$ на критической прямой $\omega_1 x_1 = \omega_2 x_2$ положительно определена.

Следовательно, максимум достигается на границе области интегрирования. Рассмотрение показывает, что точкой максимума является $x_1 = x_2 = 0$. Из /19/ получаем плотность свободной энергии

$$f = -\frac{1}{\beta}\ln(2\,\mathrm{ch}(\beta\epsilon)). \qquad /22/$$

Макроскопического заполнения бозонных мод нет, так как

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \frac{a_i^+ a_i}{N} \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{\int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 x_i \exp[N\Phi(x_1, x_2)]}{\int_0^\infty dx_1 \int_1^\infty dx_2 \exp[N\Phi(x_1, x_2)]} = 0. \qquad /23/$$

Построим аппроксимирующий гамильтониан. Справедлива следующая

Теорема. Для гамильтониана /1/ аппроксимирующим является гамильтониан $H_a = \frac{\epsilon}{2}\sum_{f=1}^{N}\sigma_f^z$ в том смысле, что

$$\lim_{N\to\infty}(f[H] - f[H_a]) = 0.$$

Доказательство. Обозначим через $H(\eta)$ оператор, полученный следующей заменой в /1/:

$$\frac{1}{2N}\sum_{f=1}^{N}\sigma_f^{\pm} \to \eta^{\#}.$$

Пусть

$$H_\Delta = H - \tilde{H}(\eta) = \lambda\left[\left(\frac{1}{2N}\sum_{f=1}^{N}\sigma^- - \eta\right)a_1^+a_2^+ + \left(\frac{1}{2N}\sum_{f=1}^{N}\sigma^+ - \eta^*\right)a_1a_2\right]. \qquad /24/$$

Согласно теореме Боголюбова[8], имеет место неравенство

$$-\frac{1}{N}\langle H_\Delta\rangle_{\tilde{H}(\eta)} \le f[H] - f[\tilde{H}(\eta)] \le -\frac{1}{N}\langle H_\Delta\rangle_H . \qquad /25/$$

Разбивая $\tilde{H}(\eta)$ на два слагаемых,

$$\tilde{H}(\eta) = H_a + \tilde{H}_F = H_a + \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + $$
$$+ \lambda(\eta^* a_1 a_2 + \eta a_1^+ a_2^+). \qquad /26/$$

для среднего в левой части /25/ получаем

$$\langle H_\Delta\rangle_{\tilde{H}(\eta)} = \lambda\left\langle \frac{1}{2N}\sum_{f=1}^{N}\sigma_f^- - \eta\right\rangle_{H_a} \cdot \langle a_1^+a_2^+\rangle_{\tilde{H}_F} + \text{к.с.} =$$
$$= -\lambda\eta\langle a_1^+a_2^+\rangle_{\tilde{H}_F} + \text{к.с.}$$

Перейдем от операторов $a_i^{\#}$ к новым бозонным операторам $A_j^{\#}$ следующим каноническим преобразованием:

$$A_1 = a_1 \operatorname{ch}\rho + a_2^+ \operatorname{sh}\rho \cdot e^{-i\phi} \; ; \; A_2 = a_1^+ \operatorname{sh}\rho \cdot e^{-i\phi} + a_2 \cdot \operatorname{ch}\rho, \qquad /27/$$

где

$$\operatorname{th}\rho = \frac{1}{2\lambda|\eta|}\left(\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2 - 4\lambda^2|\eta|^2}\right) \equiv T,$$

а $\phi = \operatorname{Arg}\eta$.

Гамильтониан $\tilde{H}_F$ диагонализуется:

$$\tilde{H}_F = E_0 + E_1 A_1^+ A_1 + E_2 A_2^+ A_2, \qquad /28/$$

где

$$E_0 = \frac{T^2}{T^2-1}\sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2 - 4\lambda^2|\eta|^2},$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(\omega_1 - \omega_2 + \sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2 - 4\lambda^2|\eta|^2}\right),$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(\omega_2 - \omega_1 + \sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2 - 4\lambda^2|\eta|^2}\right).$$

Теперь видно, что $\langle a_1^+ a_2^+\rangle_{\tilde{H}_F}$ не зависит от N, и, даже не вычисляя это среднее, получаем, что левая часть в /25/ исчезает при $N \to \infty$, когда $|\eta|$ ограничено:

$$|\eta| < K, \qquad /29/$$

где K - некоторое положительное число.

Правую часть в /25/ оценим следующим очевидным образом:

$$-\langle H_\Delta\rangle_H \le \lambda \langle \left(\frac{1}{2N}\sum_{f=1}^{N}\sigma_f^- - \eta\right)\left(\frac{1}{2N}\sum_{f=1}^{N}\sigma_f^+ - \eta^*\right) + a_1^+ a_1 a_2^+ a_2\rangle_H . \qquad /30/$$

Первое слагаемое в этом среднем ограничено в силу /29/ и ограниченности операторов $\frac{1}{2N}\sum_{f=1}^{N}\sigma_f^{\pm}$. Среднее от операторов поля представим в виде следующего интеграла, воспользовавшись методом глауберовских когерентных состояний.

$$\frac{1}{N}\langle a_1^+ a_1 a_2^+ a_2\rangle_H = N\int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2\, x_1 x_2 \exp[N\Phi(x_1, x_2)]/\tilde{Z}. \qquad /31/$$

Поскольку максимум функции $\Phi(x_1, x_2)$ достигается, когда $x_1 = x_2 = 0$, т.е. на границе области интегрирования, то при оценке интеграла методом Лапласа главный член асимптотики пропорционален $\frac{1}{N} x_1 x_2$, что при $N \to \infty$ дает нуль в правой части /25/.

Таким образом, имеем $\lim\limits_{N\to\infty} \{f[H] - f[\tilde{H}(\eta)]\} = 0.$

До сих пор $|\eta|$ предполагался просто ограниченным. Ничто не мешает положить его равным нулю. Тогда

$$\tilde{H}(\eta \equiv 0) = \omega_1 \overset{+}{a}_1 a_1 + \omega_2 \overset{+}{a}_2 a_2 + H_a.$$

Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} \{f[H] - f[H_a]\} = 0$, что и требовалось доказать.

Нами было строго показано, что система двухуровневых излучателей, взаимодействующих с электромагнитным полем и когерентной фононной модой, согласно /1/ не может претерпевать равновесный фазовый переход в сверхизлучательное состояние. Заселенность верхних уровней в системе всегда меньше, чем заселенность нижних, и становится равной ей только при бесконечной температуре /подразумевается, что $\epsilon > 0$/, так как

$$\xi = \mathrm{Tr}\{\frac{1}{2N} \sum_{f=1}^{N} \sigma_f^z \exp(-\beta H)\}/\tilde{Z} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{th}(\beta\epsilon),$$

и, следовательно, $0 \geq \xi \geq -1/2$. Если $\epsilon < 0$,то картина обратная.

Надо также заметить, что, если рассматривается процесс типа комбинационного рассеяния в данной системе, т.е. когда взаимодействие имеет вид

$$H_{M-F} = \frac{\lambda}{2N} \sum_{f=1}^{N} (\sigma_f^+ a_1 \overset{+}{a}_2 + \sigma_f^- \overset{+}{a}_1 a_2),$$

то все результаты данной работы остаются справедливыми.

Литература

1. Ахметели А.М., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. ДАН СССР, 1981, т.256, с.1094.
2. Thompson B.V. J.Phys.A, 1975, vol.8, p.126.
3. Gilmore R. Physica A, 1977, 86, No.1, p.137-146.
4. Glauber R. Phys.Rev., 1963, 131, No.6, p.2766-2788.
5. Arecchi F.T. et al. Phys.Rev.A, 1972, 6, No.6, p.2211-2237.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной мат.физики. Функциональный анализ. "Мир", М., 1977, т.1.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной мат.физики. Анализ операторов. "Мир", М., 1982, т.4.

8. Боголюбов Н.Н, /мл./ и др. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. Изд-во БАН, София, 1981.
9. Lieb E. Comm.Math.Phys., 1973, 31, No.4, p.327-340.
10. Ruskai M.B. Comm.Math.Phys., 1972, 26, No.4, p.280-289.
11. Hepp K., Lieb E. Phys.Rev.A, 1973, 8, No.5, p.2517-2525.

Рукопись поступила 30 мая 1985 года.